

Σειρές Taylor

A. N. Γιαννακόπουλος,
Τμήμα Στατιστικής
ΟΠΑ

1 Εισαγωγή

Οι σειρές Taylor είναι μια ειδική περίπτωση δυναμοσειρών που ορίζονται για παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Βρίσκουν πολύ σημαντικές εφαρμογές στον ορισμό συναρτήσεων καθώς και σε διάφορες επιστήμες, όπως η στατιστική και οι πιθανότητες.

2 Σειρές Taylor

Ορισμός 2.1 Έστω μία συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in I$, σταθερό, $x \in I$. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη. Η δυναμοσειρά

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

όπου

$$a_0 = f(x_0),$$
$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n}{dx^n} f(x) \right|_{x=x_0}, \quad n \in \mathbb{N},$$

ονομάζεται σειρά Taylor της συνάρτησης f με κέντρο το σημείο x_0 .

Η ειδική περίπτωση όπου $x_0 = 0$ οδηγεί σε μία δυναμοσειρά που ονομάζεται σειρά MacLaurin.

Παράδειγμα 2.1 Ας πάρουμε σαν παράδειγμα την πολυωνυμική συνάρτηση με $f(x) = x^3$. Ας επιλέξουμε $x_0 = 1$. Πολύ εύκολα παρατηρούμε ότι $f^{(n)}(x) = 0$, για κάθε x αν $n \geq 4$. Η σειρά Taylor της συνάρτησης f έχει λοιπόν πεπερασμένο αριθμό όρων και είναι το πολυώνυμο

$$1 + 3(x - 1) + 3(x - 1)^2 + (x - 1)^3$$

Παρατηρούμε επίσης ότι κάνοντας τις πράξεις

$$1 + 3(x - 1) + 3(x - 1)^2 + (x - 1)^3 = x^3 = f(x),$$

δηλαδή η σειρά Taylor της f ταυτίζεται με την συνάρτηση f .

Παράδειγμα 2.2 Η συνάρτηση $f(x) = e^x$ έχει σειρά Taylor γύρω από το $x_0 = 0$ (δηλαδή σειρά MacLaurin) την σειρά

$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

Η σύγκλιση της σειράς αυτής μπορεί να μελετηθεί με τον γενικό τρόπο που χειριζόμαστε την σύγκλιση δυναμοσειρών. Παρατηρούμε επίσης ότι η σειρά αυτή ταυτίζεται με την σειρά βάση της οποίας ορίσαμε την συνάρτηση e^x .

3 Προσέγγιση συναρτήσεων απο σειρές Taylor

Μια ενδιαφέρουσα ερώτηση είναι τι συμβαίνει αν πάρουμε την σειρά Taylor κάποιας συνάρτησης f την σταματήσουμε στον N -οστό όρο και μετά προσπαθήσουμε να δούμε πόσο καλή προσέγγιση είναι το πολυώνυμο N τάξης που προκύπτει για την συνάρτηση σε οποιοδήποτε σημείο x .

Με άλλα λόγια για την συνάρτηση f παίρνουμε την προσέγγιση της με την σειρά Taylor μέχρι τον N -οστό όρο που ορίζει ένα πολυώνυμο βαθμού N , το P_N τέτοιο ώστε

$$P_N(x; x_0) := \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

Σαν υπόλοιπο της προσέγγισης αυτής ορίζουμε το

$$R_N(x) = f(x) - \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

Είναι προφανές, ότι όσο μικρότερο είναι το $R_N(x)$ για κάποιο x τόσο καλύτερη είναι η προσέγγιση της συνάρτησης f στο σημείο x απο το πολυώνυμο P_N . Επίσης είναι προφανές ότι για δεδομένο N το σφάλμα της προσέγγισης αυτής, R_N , εξαρτάται απο το x ενώ εν γένει εξαρτάται και απο το N .

Πρόταση 3.1 Έστω $f \in C^{N+1}$ (δηλαδή έχει παραγώγους μέχρι και $N+1$ τάξης που είναι συνεχείς συναρτήσεις). Τότε

$$f(x) = P_N(x; x_0) + \int_{x_0}^x \frac{1}{N!} f^{(N+1)}(s)(x - s)^N ds$$

Η παραπάνω σχέση μας καθορίζει το υπόλοιπο

$$R_N(x; x_0) = \int_{x_0}^x \frac{1}{N!} f^{(N+1)}(s)(x - s)^N ds$$

Απόδειξη: Η σχέση αυτή προκύπτει απο απλή ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$\begin{aligned} R_N(x; x_0) &= \int_{x_0}^x \frac{1}{N!} f^{(N+1)}(s)(x - s)^N ds = -\frac{f^{(N)}(x_0)}{N!} (x - x_0)^N + \int_{x_0}^x \frac{1}{(N-1)!} f^{(N)}(s)(x - s)^{N-1} ds \\ &= -\frac{f^{(N)}(x_0)}{N!} (x - x_0)^N + R_{N-1}(x; x_0). \end{aligned}$$

Για να ισχύει η σχέση αυτή πρέπει να έχουμε ότι η συνάρτηση $f^{(N+1)}$ είναι συνεχής, πράγμα το οποίο ισχύει αφού απο υπόθεση $f \in C^{N+1}$. Με την ίδια λογική έχουμε ότι

$$R_\ell(x; x_0) = -\frac{f^{(\ell)}(x_0)}{\ell!} (x - x_0)^\ell + R_{\ell-1}(x; x_0), \quad \ell = 0, \dots, N-1.$$

Επαναλαμβάνοντας αυτή την σχέση και παρατηρώντας ότι

$$R_0(x; x_0) = \int_{x_0}^x f^{(1)}(s) ds = \int_{x_0}^x \frac{d}{ds} f(s) ds = f(x) - f(x_0)$$

καταλήγουμε στο ζητούμενο. □

Το υπόλοιπο της σειράς Taylor μπορεί να γραφεί με δύο εναλλακτικές μορφές:

Πρόταση 3.2 Για το υπόλοιπο R_N ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Υπάρχει κάποιο $\xi \in (x_0, x)$ τέτοιο ώστε

$$R_N(x; x_0) = \frac{1}{N!} f^{(N+1)}(\xi)(x - x_0)^{N+1}, \quad \text{Lagrange}$$

(ii) Υπάρχει κάποιο $\bar{\xi} \in (x_0, x)$ τέτοιο ώστε

$$R_N(x; x_0) = \frac{1}{N!} f^{(N+1)}(\bar{\xi})(x - \bar{\xi})^N (x - x_0), \quad \text{Cauchy}$$

Απόδειξη: Η απόδειξη χρησιμοποιεί μια παραλλαγή του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής σύμφωνα με το οποίο αν F, G συνεχείς συναρτήσεις σε κάποιο κλειστό διάστημα $I = [a, b]$ και $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in I$ τότε υπάρχει $\zeta \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$\int_a^b F(s)G(s)ds = F(\zeta) \int_a^b G(s)ds$$

Για να το δούμε αυτό, έστω m, M το μέγιστο και το ελάχιστο της F στο I , οπότε

$$mG(x) \leq F(x)G(x) \leq MG(x),$$

και ολοκληρώνοντας επάνω στο διάστημα I , παίρνουμε

$$m \int_a^b G(x)dx \leq \int_a^b F(x)G(x)dx \leq M \int_a^b G(x)dx$$

οπότε (αν ο παρονομαστής δεν μηδενίζεται)

$$m \leq \frac{\int_a^b F(x)G(x)dx}{\int_a^b G(x)dx} \leq M.$$

Εφόσον η F είναι συνεχής συνάρτηση, για κάθε $C \in [m, M]$ υπάρχει ζ τέτοιο ώστε $F(\zeta) = C$. Επιλέγοντας $C = \frac{\int_a^b F(x)G(x)dx}{\int_a^b G(x)dx}$ αποδεικνύεται ο ισχυρισμός μας.

Για να δείξουμε το (i) αρκεί να επιλέξουμε $G(s) = \frac{(x-s)^N}{N!}$ ενώ για να δείξουμε το (ii) αρκεί να επιλέξουμε $G(s) = 1$. □

Τα παραπάνω αποτελέσματα μας επιτρέπουν να εκτιμήσουμε το σφάλμα του αναπτύγματος Taylor.

Παράδειγμα 3.1 Καθορίστε τον βαθμό του πολυωνύμου Taylor N^* , έτσι ώστε το πολυώνυμο P_{N^*} να προσεγγίζει την συνάρτηση $f(x) = e^x$ γύρω από το σημείο $x_0 = 0$ και στο $x = 1$ με ακρίβεια $\epsilon = 0.01$. Έστω ότι έχουμε σταματήσει την σειρά στον όρο N . Το υπολοιπο $R_N(x; x_0)$ για $x = 1$, $x_0 = 0$ δίνεται από τον τύπο

$$R_N(1; 0) = \int_0^1 \frac{1}{N!} f^{(N+1)}(s)(1-s)^N ds = \frac{1}{N!} \int_0^1 e^s (1-s)^N ds.$$

Μπορούμε να δούμε ότι

$$|R_N(1; 0)| \leq \frac{1}{N!} \int_0^1 e^s |1-s|^N ds \leq \frac{e}{N!} \int_0^1 |1-s|^N ds$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το ότι η συνάρτηση e^x είναι αύξουσα. Μέχρι τώρα αυτό δεν είναι πολύ χρήσιμο γιατί δεν γνωρίζουμε την ακριβή τιμή του e , όμως ξέρουμε ότι $1 < e < 3$ (απο τον ορισμό του e). Άρα,

$$|R_N(1; 0)| < \frac{3}{N!} \int_0^1 |1-s|^N ds = \frac{3}{(N+1)!}$$

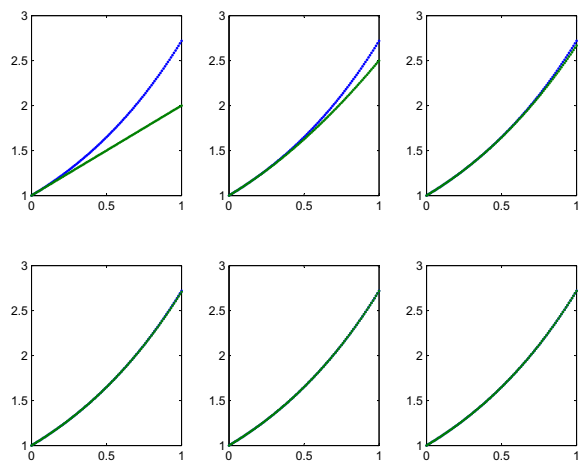
Για να υπολογίσουμε το N^* θα πρέπει να επιλέξουμε ένα N έτσι ώστε να ικανοποιείται η ανισότητα

$$\frac{3}{(N+1)!} < \epsilon$$

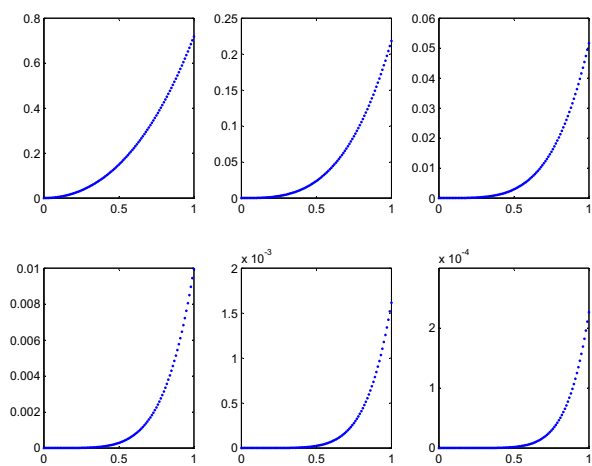
δηλαδή

$$(N+1)! > \frac{3}{\epsilon} = 300.$$

Γνωρίζουμε ότι $5! = 120$ ενώ $6! = 720$ άρα θα πρέπει να επιλέξουμε $N^* + 1 \geq 6$ δηλαδή $N^* = 5$.



Σχήμα 1: Η εκθετική συνάρτηση και η προσέγγισή της από τα πρώτα 6 πολύωνυμα Taylor στο διάστημα $[0, 1]$



Σχήμα 2: Η εκθετική συνάρτηση και το σφάλμα της προσέγγισής της από τα πρώτα 6 πολύωνυμα Taylor στο διάστημα $[0, 1]$